# Equations linéaires
# Théorème de Rouché-Fontené

Dany-Jack Mercier [♭]

http://perso.wanadoo.fr/megamaths


[♭] IUFM Guadeloupe, Morne Ferret, BP399, Pointe-à-Pitre cedex 97159, France.

# Équations linéaires

K = corps commutatif
E, F ev sur K de dim finie

(Auteur : Dany-Jack Mercier)

## I Utilisation des matrices carrées extraites pour la détermination du rang

### 1°/ Rappels

**Rang d'un système de vecteurs de E** : c'est la dimension du sev engendré par ce système

$$rg(x_1,\dots,x_p) = \dim \mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_p)$$

**Rang d'une appl. linéaire $u : E \to F$** :

$rg\,u \doteq \dim \mathrm{Im}\,u = rg(u(e_1),\dots,u(e_n))$ où $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E

On a $rg\,u \leq \mathrm{Inf}(\dim E, \dim F)$ et :

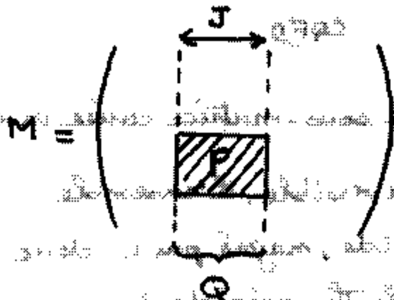
$u$ injective $\Leftrightarrow rg\,u = \dim E$ (penser à $\dim E = \dim \mathrm{Ker}\,u + rg\,u$)

$u$ surjective $\Leftrightarrow rg\,u = \dim F$

**Rang d'une matrice M** : c'est le rang commun au système de vecteurs-colonnes, à celui des vecteurs-lignes et à toute appl. linéaire de matrice M.

### 2°/ Recherche du rang d'une matrice

**Pro** : $M \in \mathcal{M}(n,p)$. Si P est une sous-matrice de M, alors $rg\,P \leq rg\,M$.




Avec les vecteurs-colonnes : $rg\,Q \leq rg\,M$

En travaillant avec les vecteurs-lignes de Q :

$rg\,P \leq rg\,Q$

d'où $rg\,P \leq rg\,M$.

CQFD

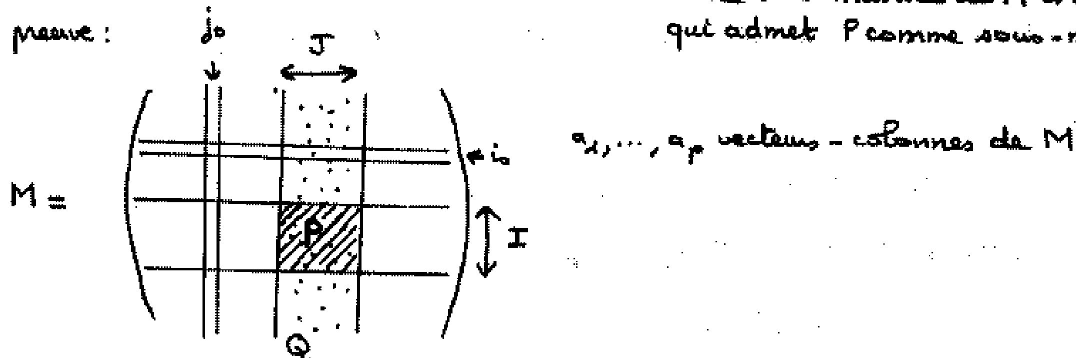
**Co** : L'ordre de toute sous-matrice carrée inversible est $\leq$ au rang de M.

* Le rang du système de vect. colonnes de M est égal au rang du syst. de vect. lignes de M. Cela provient de $rg\,M = rg\,{}^tM$ qui se montre ainsi : soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ tq $M = \mathrm{Mat}(u; e, f)$. On sait que ${}^tM = \mathrm{Mat}({}^tu; f^*, e^*)$ est la matrice de la transposée ${}^tu \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ de u, et que $\mathrm{Im}\,{}^tu = (\mathrm{Ker}\,u)^\perp$, d'où :

$$rg\,{}^tM = rg\,{}^tu = \dim \mathrm{Im}\,{}^tu = \dim(\mathrm{Ker}\,u)^\perp = \dim E - \dim \mathrm{Ker}\,u = \dim E - (\dim E - rg\,u) = rg\,u = rg\,M.$$

**Th** : $M \in \mathcal{M}(n,p)$ de rang $r$
$P$ sous-matrice carrée inversible de $M$, d'ordre $\rho$.
Si $\rho < r$ alors il existe au moins une <u>matrice bordante de $P$</u> qui soit inversible.
↓
i.e une sous-matrice de $M$ d'ordre $\rho+1$ qui admet $P$ comme sous-matrice

preuve :




$a_1, \dots, a_p$ vecteurs-colonnes de $M$

$P$ sous-mat. inversible de $Q \Rightarrow rg P = \rho \leq rg Q \leq \rho \Rightarrow rg Q = \rho$

$(a_j)_{j\in J}$ est donc un système libre de rang $\rho < r$, donc il existe $j_0 \in \mathbb{N}_p \setminus J$ tel que $(a_j)_{j\in J\cup\{j_0\}}$ soit libre.

Soit $Q'$ la matrice dont les vect. colonnes sont $(a_j)_{j\in J\cup\{j_0\}}$.

$rg Q' = \rho+1$ et $P$ est une sous-matrice de $Q'$ d'ordre $\rho$. On recommence le raisonnement avec les vecteurs-lignes de $Q'$ : il existe $i_0 \in \mathbb{N}_n \setminus I$ tel que le système de vecteurs-lignes $(b_i)_{i\in I\cup\{i_0\}}$ de $Q'$ soit libre.

<u>La matrice formée de ces vecteurs-lignes borde $P$ et est inversible</u>.

CQFD

**Co 1** : Soit $M \neq 0$. Le rang de $M$ est l'ordre maximum d'une sous-matrice carrée inversible.

preuve : $M \neq 0$ donc il existe une sous-matrice d'ordre 1 inversible. L'ensemble $\{\rho \,/\, \rho = \text{ordre d'une sous-mat. carrée inversible}\}$ est non vide, majoré par $r$ donc admet un plus grand élément $\rho_0$. $\rho_0 < r$ est absurde d'après le Th. précédent.
Donc $\rho_0 = r$. CQFD

<u>Application</u> : $a_1, \dots, a_p \in E$, $\dim E = n$.

$(a_1, \dots, a_p)$ libre ssi la matrice des composantes des $a_j$ dans une base de $E$ admet une sous-matrice carrée inversible d'ordre $p$.

ex : $a_1\begin{pmatrix}5\\4\\3\\0\end{pmatrix}$ $a_2\begin{pmatrix}7\\0\\0\\3\end{pmatrix}$ $a_3\begin{pmatrix}4\\1\\7\\0\end{pmatrix}$ est libre car $\begin{vmatrix}5&7&4\\4&0&1\\3&0&7\end{vmatrix} = -7(28-3) \neq 0$

**Co2** : $\text{rg} M = r$ ssi il existe une sous-matrice carrée inversible d'ordre $r$ dont toutes les matrices carrées bordantes ne sont pas inversibles.

($\Rightarrow$) Si $\text{rg} M = r$, $\exists P$ sous-matrice carrée inversible de $M$ d'ordre $r$ (cf Co1).
Si $P'$ est une sous-matrice bordante de $P$, $\text{rg} P' \leq r$ (cf lm) et $P'$ est d'ordre $r+1$, donc $P'$ non inversible.
($\Leftarrow$) C'est la contraposée du Th.

## II Système de n équations linéaires à p inconnues

$$(L) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases} \qquad a_{ij} \in K,\ b_i \in K$$

(L) est un système linéaire. Le système homogène (H) associé à (L) s'obtient en remplaçant les $b_i$ par 0.

Notons : $e = (e_1, \dots, e_p)$ base canonique de $K^p$
$e^* = (e_1^*, \dots, e_p^*)$ base duale de $e$
$f = (f_1, \dots, f_n)$ base canonique de $K^n$
$M = (a_{ij})$ la matrice des systèmes (L) et (H).
$u \in \mathcal{L}(K^p, K^n)$ de matrice $\text{Mat}(u; e, f) = M$

On a : $u(e_j) \doteq a_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i$ = j-ème vecteur-colonne de $M$
$\ell_i^* = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} e_j^* \in (K^p)^*$ définie par $\ell_i^*(x) = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j$ où $x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$.

(L) peut alors être interprétée sous forme :

– matricielle : $MX = B$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

– opérationnelle : $u(x) = b$ où $x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$ et $b = \sum_{i=1}^{n} b_i f_i$

– vectorielle : $x_1 a_1 + \dots + x_p a_p = b$ où $a_1, \dots, a_p, b \in K^n$

– duale : $\langle \ell_i^*, x \rangle = b_i \quad 1 \leq i \leq n$

Les rangs de $M$, de $u$, des systèmes de vecteurs $(a_1, \dots, a_p)$ et $(\ell_1^*, \dots, \ell_n^*)$ sont égaux et définissent <u>le rang $r$ du système (L)</u>.

* Le système est de Cramer si :

$n = p = r \iff M$ inversible $\iff \det M \neq 0 \iff u$ isomorphisme

Alors (L) possède 1 et 1 seule solution :

$$MX = B \iff X = M^{-1}B \quad \text{où} \quad M^{-1} = \frac{1}{\det M} \cdot {}^t\text{com}\, M$$

Ou encore : $x_1 a_1 + \dots + x_p a_p = b \Rightarrow \det(a_1, \dots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \dots, a_p) = x_j \det(a_1, \dots, a_p)$

$$\Rightarrow x_j = \frac{\det(a_1, \dots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \dots, a_p)}{\det M} \qquad 1 \leq j \leq p$$

Ce sont les formules de Cramer.

Revenons au cas général :

1°/ Structure des solutions :

(L) : $u(x) = b$

(H) : $u(x) = 0$

* L'ens. des solutions $S(H)$ de (H) est un sev de $\mathbb{R}^p$ de dimension $p - r$, car $S(H) = \text{Ker}\, u$ et $\dim \text{Ker}\, u = \dim \mathbb{R}^p - \dim \Im u$.

* (L) est compatible (ie possède au moins une solution) ssi $b \in \Im u$.

* Si $x_0 \in S(L)$, $u(x) = b \iff \begin{cases} u(x) = b \\ u(x_0) = b \end{cases} \iff u(x - x_0) = 0 \iff x - x_0 \in S(H)$

donc $S(L) = x_0 + S(H)$ est un sea de direction $S(H)$ passant par $x_0$.

2°/ Condition de compatibilité :

$S(L) \neq \emptyset \iff b \in \Im u \iff rg(a_1, \dots, a_p, b) = rg(a_1, \dots, a_p) \iff rg\, M' = rg\, M$

où $M'$ est la matrice $n \times (p+1)$ obtenue en juxtaposant $M$ et la colonne $b$.

Soit $P$ une matrice principale pour $M$ (ie une sous-matrice carrée inversible de $M$ d'ordre le rang $r$ de $M$).

$P$ est aussi une sous-matrice carrée de $M'$, donc $\underset{= r}{rg\, P} \leq rg\, M'$ et d'après I.Co.2 :

$rg\, M' = rg\, M \iff \{$ Toute sous-matrice bordante de $P$ dans $M'$ utilisant la dernière colonne $b$ n'est pas inversible.

Définition : Soit $P$ une matrice principale pour $M$. Une matrice caractéristique associée à $P$ est une matrice bordante de $P$ dans $M'$ dont la dernière colonne est extraite de $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. Le déterminant d'une telle matrice s'appelle déterminant caractéristique associé à $P$.

Th. de compatibilité :

* Si $r = n$ (ie dim $\mathcal{I}m\, u = n$), le système $(L)$ est compatible.
* Si $r < n$, soit $P$ une matrice principale pour $M$. $(L)$ est compatible ssi les $n-r$ déterminants caractéristiques associés sont nuls.

### 3°/ Théorème de Rouché - Fontené

$P = (a_{ij})_{i \in I, j \in J}$ matrice principale pour $M$.

Les inconnues principales associées à $P$ sont les $x_j$, $j \in J$
Les équations principales " " sont les équations d'indices $i \in I$

Les équations principales forment un système :

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j = b_i \qquad i \in I \qquad (L_p)$$

ou

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j = 0 \qquad i \in I \qquad (H_p)$$

On a $S(H) \subset S(H_p)$ et $S(L) \subset S(L_p)$.
Comme $\dim S(H) = p - r = \dim S(H_p)$, on déduit $S(H) = S(H_p)$.
Si $(L)$ est compatible, soit $x_0 \in S(L)$. On a

$$\left.\begin{array}{l} S(L) = x_0 + S(H) \\ S(L_p) = x_0 + S(H_p) \end{array}\right\} \Rightarrow S(L) = S(L_p)$$

Enfin, $(L_p)$ s'écrit $\sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i - \sum_{j \in \mathbb{N}_p \setminus J} a_{ij} x_j$ qui est un système de Cramer en $x_j$, $j \in J$, une fois fixés les $x_j$, $j \in \mathbb{N}_p \setminus J$. Donc :

Th. Rouché-Fontené :

Les solutions d'un système linéaire compatible sont celles de l'un quelconque de ses systèmes d'équations principales.
On résout un système d'équations principales en attribuant des valeurs arbitraires aux inconnues non principales et en résolvant le système de Cramer en les inconnues principales.

ex : Discuter suivant les valeurs du paramètre $\lambda$, le système :

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 5 \\ (\lambda-5)x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 7 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases} \qquad (L)$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & -1 \\ \lambda-5 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{d'où } \det M = -2(\lambda-1)(\lambda-6)$$

1^er cas : Si $\lambda \notin \{1,6\}$, (L) est un système de Cramer, d'où :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & \lambda & -1 \\ 7 & 3 & 7 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{\det M} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ \lambda-5 & 7 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}}{\det M} \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & \lambda & 5 \\ \lambda-5 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{\det M}$$

d'où $x_1 = \frac{-7}{\lambda-1}$ $\qquad x_2 = \frac{7}{\lambda-1}$ et $x_3 = \frac{2\lambda-9}{\lambda-1}$

2^e cas : Si $\lambda \in \{1,6\}$, $\operatorname{rg} M \leq 2$. On peut étudier les cas séparément. On peut aussi remarquer que $\operatorname{rg} M = 2$ puisqu'une matrice principale est :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La condition de compatibilité s'écrit : $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ \lambda-5 & 7 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 14\lambda - 84 = 0$

* Si $\lambda = 1$, il n'y a pas de solution.
* Si $\lambda = 6$, (L) est compatible, et équivaut au système formé par les équations principales :

$$(L_P) \quad \begin{cases} 2x_1 - x_3 = 5 - 6x_2 \\ x_1 + 2x_3 = 4 - 3x_2 \end{cases}$$

Finalement $\begin{cases} x_1 = -3x_2 + \frac{14}{5} \\ x_3 = \frac{3}{5} \end{cases}$ où $x_2$ décrit $\mathbb{R}$.

La méthode de résolution des II conduit vite à des calculs inextricables, même sur ordinateur, d'où le recours à des algorithmes "d'analyse numérique linéaire". La méthode du pivot de Gauss en est un, et sera abordé au § III. 3°/.

## III Opérations élémentaires

### 1°/ Définitions

$M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(n,p)$ $\quad l_i$ = i-ème ligne
$\quad c_i$ = i-ème colonne

3 types d'opérations élémentaires sur les lignes (ou sur les colonnes) :

| nature | effet | Traduction matricielle |
|---|---|---|
| échange de 2 lignes | $l_i \leftrightarrow l_j$ | $M \mapsto M_\tau M$ où $M_\tau = (m_{k\ell}) \in \mathcal{M}(n)$, $m_{k\ell} = \delta_{k\tau(\ell)}$ où $\tau$ = transposition $(i,j)$ (*) |
| multiplication d'une ligne par un scalaire non nul | $l_i \mapsto \alpha l_i$ | $M \mapsto D_i(\alpha).M$ où $D_i(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(n)$ ($\alpha$ en i-ème colonne) |
| Addition d'un multiple d'une ligne à une autre | $l_i \mapsto l_i + \lambda l_j$ | $M \mapsto U_{ij}(\lambda).M$ où $U_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda M_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & \lambda \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ ($\lambda$ en position $(i,j)$) ; $M_{ij}$ base canonique de $\mathcal{M}(n)$. |

(*) Vérifions-le : $M_\tau M = (c_{k\ell})$ où $c_{k\ell} = \sum_{s=1}^{n} \underbrace{m_{ks}}_{\delta_{k\tau(s)}} . a_{s\ell} = \begin{cases} a_{k\ell} & \text{si } k \notin \{i,j\} \\ a_{\tau^{-1}(k)\ell} & \text{si } k \in \{i,j\} \end{cases}$ oui.

NB : 1) Le m̂ tableau est valable pour des colonnes : il suffit de composer les matrice dans l'autre ordre. Ainsi échanger les colonnes $c_i$ et $c_j$ $(c_i \leftrightarrow c_j)$ revient à multiplier $M$ par $M_\tau$ à droite : $M \mapsto M M_\tau$ avec $M_\tau \in \mathcal{M}(p)$ cette fois-ci.

2) $M_\tau$ = matrice de transposition
$D_i(\alpha)$ = " d'affinité
$U_{ij}(\lambda)$ = " de transvection.

2°/ <u>Intérêt</u> :

Si $M \in \mathcal{M}(n,p)$ est donnée, on veut :

* trouver $\operatorname{rg} M$
* Calculer $\det M$ si $n=p$.
* Résoudre $MX=B$ où $B \in \mathcal{M}(n,1)$ est donnée
* Calculer $M^{-1}$ si $M \in GL(n)$.

A l'aide d'opérations élémentaires, on se ramène à une matrice triangulaire supérieure $T=(t_{ij})$, ie tq $\exists r \in \mathbb{N}_n$ $t_{ij}=0$ si $i>r$ ou $i>j$.

On remplace M par la matrice $T=UMV$ où U et V sont les composées des matrices rendant compte des opérations élémentaires sur les lignes (U) et les colonnes (V) de M.

Le problème est facile à résoudre avec T :

a) <u>$\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} T$</u> car $U \in GL(n)$ et $V \in GL(p)$.

On encore : $\operatorname{Vect}(\ell_i,\ell_j) = \operatorname{Vect}(\ell_i+\lambda\ell_j,\ell_j) = \underset{\alpha\neq 0}{\operatorname{Vect}(\alpha\ell_i,\ell_j)} = \operatorname{Vect}(\ell_j,\ell_i)$

montre que les sev engendrés par les vecteurs lignes de M sont inchangés par des opérations élémentaires sur des lignes.

ex : $M=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 7 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & -21 & 8 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow 4\ell_2-7\ell_1 \\ \leftarrow \ell_3-\ell_1 \\ \leftarrow 2\ell_4-\ell_1 \end{matrix}$

$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & -21 & 8 \\ 0 & 0 & -37 \\ 0 & 0 & 40 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow 21\ell_3-2\ell_2 \\ \leftarrow 21\ell_4+5\ell_2 \end{matrix}$

donc $\operatorname{rg} M = 3$ car $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & -21 & 8 \\ 0 & 0 & -37 \end{vmatrix} \neq 0$

b) $\det T = \det U \cdot \det M \cdot \det V$ mais il est inutile de calculer $\det U$ et $\det V$. Il suffit de noter que :

$$\det(\ell_i, \ell_j) = -\det(\ell_j, \ell_i) = \det(\ell_i + \lambda \ell_j, \ell_j) = \frac{1}{\lambda} \det(\lambda \ell_i, \ell_j)$$

ex : $\xi_1, \dots, \xi_n \in K$. Calculer le déterminant de Vandermonde

$$V(\xi_1, \dots, \xi_n) = \begin{vmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_1^2 & \dots & \xi_1^{n-1} \\ 1 & \xi_2 & \xi_2^2 & \dots & \xi_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & \xi_n & \xi_n^2 & \dots & \xi_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \xi_2 - \xi_1 & (\xi_2 - \xi_1)\xi_2 & & (\xi_2 - \xi_1)\xi_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \xi_n - \xi_1 & (\xi_n - \xi_1)\xi_n & & (\xi_n - \xi_1)\xi_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{k=2}^{n} (\xi_k - \xi_1) \cdot V(\xi_2, \dots, \xi_n)$$

d'où $V(\xi_1, \dots, \xi_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\xi_j - \xi_i)$ par récurrence sur $n$.

c) Système linéaire :

$$MX = B \iff \underbrace{UMV}_{T} \cdot V^{-1}X = UB \iff \begin{cases} TX' = UB \\ X = VX' \end{cases}$$ d'où $X$ connaissant $X'$.

d) Calcul de $M^{-1}$ :

Si $M \in GL(n)$, $M^{-1} = (U^{-1} T V^{-1})^{-1} = V T^{-1} U$

Ce sera le seul endroit où il sera nécessaire d'expliciter $U$ et $V$.

NB : $T = UMV$ s'écrit $T = (U I_n) M (I_p V)$ donc $U$ et $V$ s'obtiennent en transformant $I_n$ (resp. $I_p$) par la succession d'op. él. sur les lignes (resp. colonnes) qui interviennent pour passer de $M$ à $T$.

## 3°/ Résolution d'un système linéaire par la méthode du pivot de Gauss.

$M \in \mathcal{M}(n,p)$. On peut, à partir de $M$, par opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes, obtenir une matrice triangulaire supérieure $T = (t_{ij})$
(ie $\exists r \in \mathbb{N}_n \quad t_{ij} = 0$ si $i > r$ ou $i > j$)
et vérifiant $t_{11} \dots t_{rr} \neq 0$.

preuve :
$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & & \\ \vdots & & \\ a_{n1} & & a_{np} \end{pmatrix}$$

Si $M = 0$, c'est fini. Sinon on permute colonnes ou lignes pour avoir $a_{11} \neq 0$ et on utilise $a_{11}$ comme pivot pour supprimer $a_{21}, \dots, a_{n1}$ grâce aux op. él. :
$$l_i \mapsto l_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} l_1$$

On arrive à :
$$M_1 = \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & * \\ \hline 0 & \\ | & M'_1 \\ 0 & \end{array}\right)$$

et on applique l'hypothèse de récurrence à $M'_1$. L'hyp. de réc. étant triviale si $n=1$, c'est démontré. CQFD

On a donc obtenu :
$$T = \left(\begin{array}{c} \begin{matrix} t_{11} & \ddots & * \\ 0 & & t_{rr} \end{matrix} \\ \hline 0 \end{array}\right)$$

Avec les notations du 2°/c :
$$MX = B \iff TX' = UB = \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}$$

La condition de compatibilité est $b'_{r+1} = \dots = b'_n = 0$ et il suffit de résoudre le système de Cramer triangulaire formé par les $r$ premières équations, qui sont les équations principales, pour résoudre le système $MX = B$.

ex : Trouver $\lambda$ pour que le système suivant soit compatible. Le résoudre :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 4 \\ x_1 + x_3 = -2 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = \lambda \end{cases}$$

Notons le $MX = B$ et travaillons avec la matrice $(M|B)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 5 & \lambda \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & -6 \\ 0 & -2 & 8 & \lambda-4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow l_2 - l_1 \\ \leftarrow l_3 - l_1 \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow l_3 - 2l_2 \end{array}$$

La condition de compatibilité est $\lambda + 8 = 0$.

Si $\lambda \neq -8$, pas de solution.

Si $\lambda = -8$, on résout le système principal

$$\begin{cases} x + y - 3z = 4 \\ \quad -y + 4z = -6 \end{cases}$$

où $x, y$ sont les inconnues principales. On fixe $z$ et on trouve :

$$\begin{cases} x = -z - 2 \\ y = 4z + 6 \end{cases} \qquad \forall z \in \mathbb{R}$$

## 4°/ Calcul de $M^{-1}$ grâce au pivot de Gauss.

**Théorème** : $M \in \mathcal{M}(n,p)$. On peut, à partir de $M$ et par op. él. sur les lignes seules* de $M$ obtenir une matrice triangulaire supérieure $T = (t_{ij})$.
(ie tq $\exists r \in \mathbb{N}_n$ $t_{ij} = 0$ si $i > r$ ou $i > j$ )

(* En fait par op. él. du type $l_i \mapsto l_i + \lambda l_j$ seulement, ie par composition de transvections à gauche)

La preuve est identique à celle du 3°/ mais on ne peut plus permuter les colonnes :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1p} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & & a_{np} \end{pmatrix}.$$

Si la 1ère colonne est nulle, on écrit $M = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ \vdots & M' \\ 0 & \end{array}\right)$ et on applique l'hyp. réc. à $M'$.

Si la 1ère colonne n'est pas nulle, on a $a_{i1} \neq 0$. On peut supposer $a_{11} \neq 0$ quitte à échanger $l_1 \leftrightarrow l_i$ ou à faire $l_1 \mapsto l_1 + l_i$ (si l'on ne veut utiliser que des transvections à gauche)

Par op. él. $\ell_i \mapsto \ell_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}\ell_1$, on arrive encore à $M_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & * \\ 0 & \\ \vdots & M'_1 \\ 0 & \end{pmatrix}$

et on applique l'hyp. réc. à $M'_1$.

CQFD

**Co 1** : Toute matrice $M \in GL(n)$ peut être transformée par transvections à gauche (ie par des op. él. $\ell_i \mapsto \ell_i + \lambda \ell_j$) en une matrice triangulaire supérieure inversible

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & t_{nn} \end{pmatrix} \qquad \det T = t_{11} \cdots t_{nn} = \det M$$

preuve : Dans la preuve du Th. précédent, aucune des colonnes de M est nulle, donc les $t_{ii}$, $1 \leq i \leq n$, sont différents de 0.
Le déterminant est conservé car les seules op. él. utilisées sont les $\ell_i \mapsto \ell_i + \lambda \ell_j$.

CQFD

**Co 2** : Toute matrice $M \in GL(n)$ peut être transformée par transvections à gauche (resp. par op. él. sur les lignes) en une matrice diagonale inversible D (resp. en $I_n$).

preuve : Une fois obtenue $T = \begin{pmatrix} t_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & t_{nn} \end{pmatrix}$ par le Co 1, on recommence en annulant les $n-1$ premiers termes de la dernière colonne en utilisant $t_{nn}$ comme pivot, etc.
On obtient $D = \begin{pmatrix} t_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t_{nn} \end{pmatrix}$ diagonale.

Si on se permet les op. él. $\ell_i \mapsto \alpha \ell_i$, on arrivera à $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$. CQFD

**Conséquence** : On passe de M à $I_n$ par op. él. sur les lignes seules. Avec les notations du 2°/, on aura : $T = I_n = UM$ ie $\boxed{M^{-1} = U = U I_n}$

Ainsi les op. él. sur les lignes permettant de passer de M à $I_n$ vont transformer $I_n$ en $M^{-1}$. D'où la méthode de calcul de $M^{-1}$ par des op. él. :

ex : Calculer $M^{-1}$ pour :

**Matrice M** — **Matrice $I_n$**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \\ \ell_2-\ell_1 \to \\ \ell_3-\ell_1 \to \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\ell_2 \leftrightarrow \ell_4 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \\ \\ \ell_3+\ell_2 \to \\ \ell_4+3\ell_2 \to \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \\ \\ \\ 3\ell_4-2\ell_3 \to \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

M est devenue triangulaire. On recommence avec les pivots 15, −3 et 1 :

$$\begin{matrix} \\ 15\ell_2-2\ell_4 \to \\ 5\ell_3-\ell_4 \to \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 4 & 1 \\ -4 & -3 & 7 & -2 \\ -1 & 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 15\ell_1+\ell_3 \to \\ \ell_2-\ell_3 \to \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 15 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 11 & -3 & 7 & -2 \\ 6 & -3 & -3 & 3 \\ -4 & -3 & 7 & -2 \\ -1 & 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \ell_1-2\ell_2 \to \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 3 & 13 & -8 \\ 6 & -3 & -3 & 3 \\ -4 & -3 & 7 & -2 \\ -1 & 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \ell_1/15 \to \\ \ell_2/15 \to \\ \ell_3/15 \to \\ \ell_4/15 \to \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 13 & -8 \\ 6 & -3 & -3 & 3 \\ 4 & 3 & -7 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & 7 \end{pmatrix} = M^{-1}.$$

5°/ Méthode du pivot de Jordan : On améliore le Th. du 4°/ ainsi

**Théorème** : Toute matrice $M \in \mathcal{M}(n,p)$ peut être transformée par transvections à gauche en une matrice triangulaire supérieure $T = (t_{ij})$ telle que :

$$t_{ii} = 1 \text{ ou } 0$$

preuve : Comme au Th. du 4°/ mais au lieu de s'arrêter à $a_{11} \neq 0$ quand la 1re colonne est non nulle, on transforme $a_{11}$ en 1 grâce aux op. él. :

$$\ell_i \mapsto \ell_i + \left(\frac{1-a_{i1}}{a_{11}} - 1\right)\ell_1 \quad \text{puis} \quad \ell_1 \mapsto \ell_1 + \ell_i$$

On utilise alors 1 comme pivot dans la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \\ a_{21} & /// \\ \vdots & \\ a_{n1} & \end{pmatrix}$ pour obtenir $\begin{pmatrix} 1 & /// \\ 0 & \\ \vdots & M' \\ 0 & \end{pmatrix}$ et on applique l'hyp. réc.

En reprenant le 4° (Col et Co2) avec 1 à la place des $t_{11}, \dots, t_{n-1,n-1}$, on obtient :

**Proposition** : Toute matrice $M \in GL(n)$ peut être transformée par transvections à gauche en une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & & /// & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & 1 & \\ & & & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & 1 & \\ & & & \alpha \end{pmatrix} = D_n(\alpha)$$

où $\alpha = \det M$

* Conséquence :

$$\forall M \in GL(n) \quad \exists!\, U \in GL(n) \quad M = U \cdot D_n(\det M)$$

U est le produit de matrices de transvections. Ainsi :

Les matrices de transvection $U_{ij}(\lambda)$ et les matrices d'affinité $D_n(\alpha)$, $\alpha \in K^*$, engendrent $GL(n)$.

En particulier $SL(n) \neq \{M \in GL(n) \,/\, \det M = 1\}$ sera engendré par les matrices de transvections.

On en déduit aussi que <u>2 matrices de $\mathcal{M}(n,p)$ sont équivalentes ssi on peut passer de l'une à l'autre par une succession d'opérations élémentaires.</u>

(preuve : Soient $M, N \in \mathcal{M}(n,p)$. $M$ et $N$ sont équivalentes ssi $\exists P \in GL(n), \exists Q \in GL(p)$ $M = PNQ$. On aura $P = UD$ et $Q = U'D'$, d'où $M = UDNU'D'$ cqfd )

<u>Référence</u> : Ramis, Deschamps, Odoux, "Cours de Maths Spé", tome I, chap 11.